

УДК 532.517.013.4:537.2

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ¹⁾**Н.П. ДОБЫЧИН, А.А. ШУТОВ***Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ**E-mail: shutov@iate.obninsk.ru***AXISYMMETRIC ISSUE OF ELECTROHYDRODYNAMIC JET WITH MOVING BOUNDARY****N.P. DOBYCHIN, A.A. SHUTOV***Obninsk Institute of Nuclear Power Engineering of the National Research Nuclear University MEPhI***Аннотация**

Рассмотрена задача струйного истечения вязкой несжимаемой жидкости из круглого отверстия под действием электрических, гравитационных и капиллярных сил. Наряду с гидродинамическими параметрами в данной задаче искомой величиной является также форма струи. В рассматриваемом случае течение расположено внутри осесимметричной области, граница которой в цилиндрических координатах характеризуется зависимостью радиуса от продольной координаты. В квазиодномерном приближении постановка сведена к краевой задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. На равномерной сетке по продольной координате построена итерационная процедура определения зависимости радиуса струи от продольной координаты. На каждой итерации для искомой сеточной функции решается система линейных уравнений с четырех-диагональной матрицей. В качестве начального приближения использовано асимптотическое решение задачи. Проведено сравнение результатов вычислений с экспериментальными данными истечения простых жидкостей.

Ключевые слова: Электрогидродинамическое течение, форма струи, нелинейная краевая задача, метод линеаризации

Summary

A viscous electrohydrodynamic jet problem is considered. It is supposed incompressible liquid issues from circular orifice under an action of electrical, gravitational, and capillary forces. Unknown quantities are hydrodynamic parameters as well as jet form. In this case flow located in axisymmetric region those boundaries described by dependence of radius from longitudinal coordinate in cylindrical coordinates. A statement reduced to boundary problem for nonlinear ordinary three-order differential equation. Iterative procedure is developed for determination of jet radius from longitudinal coordinate in uniform mesh. Linear system equation with four-diagonal matrix was solved for mesh function at all iteration. Asymptotic solution of problem is used as initial approximation. Computational results are compared with experimental data for issue of simple liquids.

Key words: EHD flow, form of jet, nonlinear boundary problem, linearization technique

Введение

Рассматривается стационарная задача течения полубесконечной вязкой заряженной струи под действием электрических сил. Схема формирования течения выглядит следующим образом. Из капилляра подается жидкость с постоянным расходом в область электрического поля. Вблизи точки истечения жидкость, приобретающая форму полукапли, заряжается в соответствии с законами электростатики. Ниже

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00405)

по течению заряды ускоряются внешним электрическим полем, вовлекая в движение окружающую жидкость. В результате струя сужается, и подобная технология позволяет получать жидкие нити с поперечным размером вплоть до нескольких нанометров на капилляре диаметром порядка 1 миллиметра [1]. Целью работы является расчет формы и скоростей струи.

1. Математическая модель

Пусть струя жидкости с плотностью ρ и вязкостью μ подается с постоянным расходом Q через круглое отверстие радиуса r_0 в область однородного электрического поля напряженности E_0 . Вектор напряженности поля совпадает с осью струи, влиянием воздушной среды вне струи пренебрегаем. Стационарное осесимметричное течение рассматривается в квазиодномерном приближении [2, 3], учитывающем влияние электрических, капиллярных и гравитационных сил. В цилиндрических координатах r, z , где продольная координата z совпадает с осью струи, уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\rho u^2}{2} + T \left(\frac{1}{f} - f'' \right) \right) = 3\mu \frac{d}{dz} (f^2 u') + F_{el} + \rho g, \quad (1)$$

$$\pi u f^2 = Q, \quad (2)$$

$$F_{el} = \begin{cases} \frac{d}{dz} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}, & z < r_0, \\ \frac{IE_0}{2Q} \left(1 - \frac{f^2}{r_0^2} \right), & z \geq r_0. \end{cases}$$

Искомые величинами являются продольная скорость жидкости $u(z)$ и радиус струи $f(z)$. Штрихом обозначено дифференцирование по z , T — коэффициент поверхностного натяжения, I — электрический ток, переносимый струей, g — ускорение свободного падения, σ — плотность поверхностного заряда, ε_0 — диэлектрическая постоянная. Согласно рассматриваемой модели электрическое воздействие F_{el} на расстояниях $z < r_0$ определяется электростатикой, а при $z \geq r_0$ — взаимодействием замороженного заряда с внешним полем.

Введем безразмерные переменные $\bar{z} = z/r_0$, $\bar{f} = f/r_0$, $\bar{u} = u\pi r_0^2/Q$ и исключим скорость из (1), (2). Уравнение для радиуса приобретает вид

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f^4} + \frac{1}{We} \left(\frac{1}{f} - f'' \right) \right) = \frac{3}{Re} \frac{1}{f^2} \frac{d}{dz} \left(f^2 \frac{d}{dz} \frac{1}{f^2} \right) + F_{el} + \frac{1}{Fr}. \quad (3)$$

Здесь и далее надстрочный знак у безразмерных величин опущен. Числа Вебера, Рейнольдса и Фруда равны соответственно

$$We = \frac{\rho Q^2}{2\pi^2 r_0^3 T}, \quad Re = \frac{\rho Q}{2\pi \mu r_0}, \quad Fr = \frac{Q^2}{2\pi^2 r_0^5 g}.$$

Электрическая сила равна

$$F_{el} = \begin{cases} a(z+1), & z < 1, \\ (1-f^2)/s, & z \geq 1. \end{cases}$$

$$a = \frac{18\pi\varepsilon_0 E_0^2 r_0^4}{\rho Q^2}, \quad s = \frac{\rho Q^3}{2\pi^2 I E_0 r_0^5}.$$

Здесь предположено, что в электростатической области форма струи близка к полусфере. Требуется найти решение уравнения (3) при $z \geq 0$, удовлетворяющее условиям

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad f'(\infty) = 0. \quad (4)$$

Далее рассмотрим случай доминирования электрических сил, соответствующего условиям $s > 1$ от точки истечения. Асимптотическая зависимость радиуса f_a может быть представлена в виде [2, 3]

$$f_a(z) = f_0(z) + f_1(z). \quad (5)$$

где главное слагаемое равно

$$f_0(z) = \left(\frac{1}{dz + \text{const}} \right)^{1/4}, \quad d = \frac{1}{s}.$$

Малые поправки в радиус капиллярных, гравитационных и вязких сил даются выражением

$$f_1(z) = \frac{f_0^5}{4} \left(\frac{b}{f_0} - c \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{z}} - \frac{z}{Fr} \right), \quad b = \frac{1}{We}, \quad c = \frac{3}{Re}.$$

2. Численная задача

На полуоси $z \geq 0$ выберем отрезок $[0, L]$, на котором построим равномерную с шагом h сетку $z_k = kh$, $h = L/n$, $k = 0, 1, \dots, n$. Разрешим уравнение (3) относительно третьей производной

$$bf''' = \frac{d}{dz} \Phi(f, f') + \varphi(z, f, f'), \quad (6)$$

где

$$\Phi(f, f') = \frac{1}{f^4} + \frac{b}{f} + 2c \frac{f'}{f^3}, \quad \varphi(z, f, f') = 4c \frac{f'^2}{f^4} - F_{el} - \frac{1}{Fr}.$$

Проинтегрируем (6) на отрезке $[z_k, z_{k+1}]$:

$$b \frac{f_{k+2} - 3f_{k+1} + 3f_k - f_{k-1}}{h^2} = \Phi(f_{k+1}, f'_{k+1}) - \Phi(f_k, f'_k) + \frac{h}{2} (\varphi(z_{k+1}, f_{k+1}, f'_{k+1}) + \varphi(z_k, f_k, f'_k)).$$

Здесь вторая производная аппроксимирована простейшим выражением второго порядка точности, а интеграл от последнего слагаемого в правой части (6) вычислен по формуле трапеций. Далее первая производная аппроксимируется выражением

$$f'_k = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h} + O(h^2).$$

В результате получается система нелинейных уравнений, которая решается методом итераций:

$$\begin{aligned} b \frac{f_{k+2}^{(s+1)} - 3f_{k+1}^{(s+1)} + 3f_k^{(s+1)} - f_{k-1}^{(s+1)}}{h^2} &= \Phi \left(f_{k+1}^{(s+1)}, \frac{f_{k+2}^{(s+1)} - f_k^{(s+1)}}{2h} \right) - \Phi \left(f_k^{(s+1)}, \frac{f_{k+1}^{(s+1)} - f_{k-1}^{(s+1)}}{2h} \right) + \\ &+ \frac{h}{2} \left(\varphi \left(z_{k+1}, f_{k+1}^{(s+1)}, \frac{f_{k+2}^{(s+1)} - f_k^{(s+1)}}{2h} \right) + \varphi \left(z_k, f_k^{(s+1)}, \frac{f_{k+1}^{(s+1)} - f_{k-1}^{(s+1)}}{2h} \right) \right), \end{aligned}$$

где $s = 0, 1, \dots$ – номер итерации. Далее выполняется линейаризация системы по следующей схеме [4].

Обозначим $\Delta_k = f_k^{(s+1)} - f_k^{(s)}$, и преобразуем первое слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} \Phi \left(f_{k+1}^{(s+1)}, \frac{f_{k+2}^{(s+1)} - f_k^{(s+1)}}{2h} \right) &= \Phi \left(f_{k+1}^{(s)} + \Delta_{k+1}, \frac{f_{k+2}^{(s)} - f_k^{(s)}}{2h} + \frac{\Delta_{k+2} - \Delta_k}{2h} \right) = \\ &= \Phi \left(f_{k+1}^{(s)}, \frac{f_{k+2}^{(s)} - f_k^{(s)}}{2h} \right) + \Delta_{k+1} \frac{\partial \Phi}{\partial f} \left(f_{k+1}^{(s)}, \frac{f_{k+2}^{(s)} - f_k^{(s)}}{2h} \right) + \frac{\Delta_{k+2} - \Delta_k}{2h} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left(f_{k+1}^{(s)}, \frac{f_{k+2}^{(s)} - f_k^{(s)}}{2h} \right), \end{aligned}$$

где $v = f'$. Последнее соотношение компактно может быть записано так:

$$\Phi_{k+1}^{(s+1)} = \Phi_{k+1}^{(s)} + \Delta_{k+1} \frac{\partial \Phi_{k+1}^{(s)}}{\partial f} + \frac{\Delta_{k+2} - \Delta_k}{2h} \frac{\partial \Phi_{k+1}^{(s)}}{\partial v}.$$

После линейаризации всех слагаемых получается система линейных уравнений относительно Δ_k , имеющая вид

$$A_k \Delta_{k-1} + B_k \Delta_k + C_k \Delta_{k+1} + D_k \Delta_{k+2} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad (7)$$

где

$$A_k = -\frac{b}{h^2} - \frac{1}{2h} \frac{\partial \Phi_k^{(s)}}{\partial v} + \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_k^{(s)}}{\partial v}, \quad B_k = \frac{3b}{h^2} + \frac{1}{2h} \frac{\partial \Phi_{k+1}^{(s)}}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_k^{(s)}}{\partial f} + \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_{k+1}^{(s)}}{\partial v} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_k^{(s)}}{\partial f},$$

$$C_k = -\frac{3b}{h^2} + \frac{1}{2h} \frac{\partial \Phi_k^{(s)}}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_{k+1}^{(s)}}{\partial f} - \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_k^{(s)}}{\partial v} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_{k+1}^{(s)}}{\partial f}, \quad D_k = \frac{b}{h^2} - \frac{1}{2h} \frac{\partial \Phi_{k+1}^{(s)}}{\partial v} - \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_{k+1}^{(s)}}{\partial v},$$

$$F_k = -b \frac{f_{k+2}^{(s)} - 3f_{k+1}^{(s)} + 3f_k^{(s)} - f_{k-1}^{(s)}}{h^2} + \Phi_{k+1}^{(s)} - \Phi_k^{(s)} + \frac{h}{2} (\varphi_{k+1}^{(s)} + \varphi_k^{(s)}), \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Для замыкания системы уравнений используем граничные условия (4) и асимптотику (5). Положим

$$f(0) = f_0 = 1, \quad f(L) = f_n = \frac{1}{(1 + dL)^{1/4}}, \quad f'_n = -\frac{d}{4(1 + dL)^{5/4}} = \alpha.$$

Для первой производной используем аппроксимацию

$$f'_n = \frac{f_{n-2} - 4f_{n-1} + 3f_n}{2h} + O(h^2).$$

В результате (7) дополняется условиями

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_n = 0, \quad \Delta_{n-2} - 4\Delta_{n-1} + 3\Delta_n = 2h\alpha - (f_{n-2}^{(s)} - 4f_{n-1}^{(s)} + 3f_n^{(s)}) = F_{n-1}. \quad (8)$$

В качестве начального приближения использована асимптотика (5):

$$f_k^{(0)} = \frac{1}{(1 + dz_k)^{1/4}}. \quad (9)$$

Матрица системы (7), (8) имеет 4-х диагональную структуру, причем под и над главной диагональю расположены одна и две побочные диагонали соответственно. Подобная система уравнений решается методом прогонки.

3. Результаты вычислений

Рассматриваемая модель и соответствующая численная схема тестировались на реальных экспериментальных данных. Использованы опытные зависимости радиуса струи от продольной координаты для простых жидкостей, как дибутилфталат, циклогексанол и глицерин. На рис. 1 приведены экспериментальные и расчетные графики зависимости радиуса струи для дибутилфталата.

Вычисления производились по схеме (7), (8) и начальным приближением (9) с использованием опытных данных: $a = 2.22 \cdot 10^4$, $b = 1.48 \cdot 10^4$, $c = 65.1$, $d = 3.08 \cdot 10^5$, $1/Fr = 1.72 \cdot 10^3$. Длина $L = 40$, что в размерном виде соответствует расстоянию от капилляра $z = 2$ см. Согласно (5) и (9) радиус струи на этой дистанции уменьшается в 60 раз. Расчеты выполнялись с шагами $h = 10^{-3}$, 10^{-4} и 10^{-5} , точность контролировалась параметром δ :

$$\delta = \max_k |\Delta_k|.$$

Во всех рассмотренных случаях значение $\delta = 10^{-12}$ достигалось за 8–10 итераций. Из графиков видно, что экспериментальная зависимость выходит на расчетную кривую на расстояниях порядка нескольких радиусов капилляра. В данном случае при $z > 3$ имеет место количественное совпадение результатов в пределах экспериментальных погрешностей. На начальном участке течения наблюдаемое отклонение расчетных и опытных данных можно объяснить, учитывая следующие два фактора. Во-первых, вблизи капилляра могут формироваться зоны обратного течения, наличие которых квазиодномерная модель не учитывает. Во-вторых, упрощенные выражения для электрических натяжений также вносят погрешность в результаты. Тем не менее, в целом полученные расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются между собой.

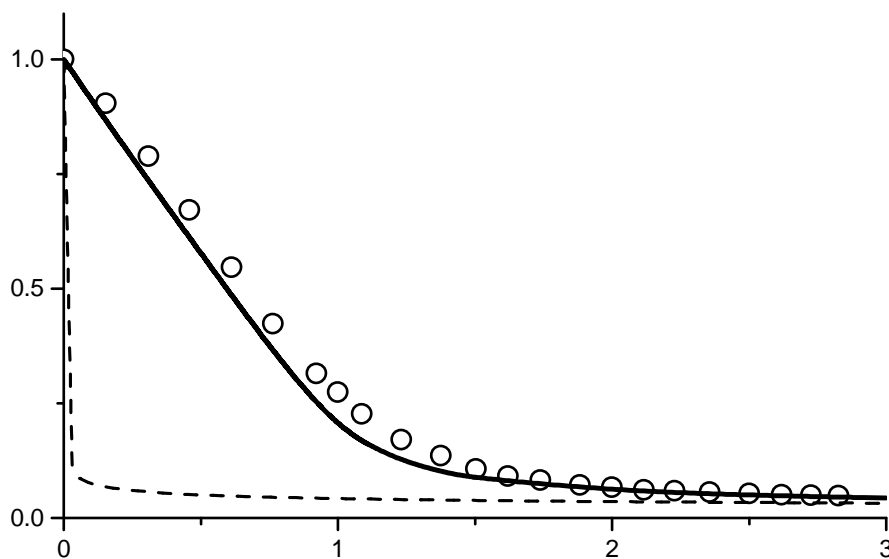


Рис. 1: Зависимость радиуса струи от продольной координаты для дибутилфталата. Горизонтальная ось соответствует координате z , вертикальная – радиусу струи $f(z)$. Сплошная линия – результаты расчетов, пунктирная линия – начальное приближение (9), кружки – экспериментальная зависимость

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fong, H., Reneker, D.H.** Elastomeric nanofibers of styrene-butadiene-styrene triblock copolymer // J. Polym. Sci: Part B. Polym. Phys. – 1999. – V. 37. – P. 3488–3493.
2. **Кириченко В.Н., Петрянов И.В., Супрун Н.Н., Шутов А.А.** Асимптотический радиус слабопроводящей жидкой струи в электрическом поле // Докл. АН СССР. – 1986. – Т.289. – С.817–820.
3. **Шутов А.А.** Получение ультратонких волокон методом электропрядения // МЖГ. – 2008. – №. 4. – С.38–52.
4. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. – М.:Наука, 1978. – 512 с.

REFERENCES

1. **Fong H., Reneker D.H.** Elastomeric nanofibers of styrene-butadiene-styrene triblock copolymer // J. Polym. Sci: Part B. Polym. Phys. – 1999. – V.37. – P. 3488-3493.
2. **V. N. Kirichenko, I. V. Petryanov-Sokolov, N. N. Suprun, and A. A. Shutov** Asymptotic radius of a slightly conducting liquid jet in an electric field // Sov. Phys. Dokl. – 1986. – V.31. – P. 611-614.
3. **A. A. Shutov** Formation of ultrafine fibers by electrospinning method // Fluid Dynamics. – 2008. – № 4. – P. 38-52.
4. **Kalitkin N.N.** Numerical methods [Chislennyye metody]. – Moscow: Nauka, 1978. – 512 p. (in Russian)